LE FORMAT DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES AU BACCALAUREAT, SERIE D

L'épreuve de Mathématiques à l'examen du Baccalauréat, série D, est conçue de façon à couvrir toutes les compétences déclinées à partir du profil de sortie des élèves à la fin du second cycle de l'enseignement secondaire.

I. REFERENTIEL DE COMPETENCES

Compétence 1 : Traiter une situation relative aux calculs algébriques et aux fonctions

Compétence 2 : Traiter une situation relative à la modélisation de phénomènes aléatoires, à l'organisation et au traitement des données.

Compétence 3 : Traiter une situation relative à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan.

L'épreuve de Mathématiques au Baccalauréat, série D, évalue chez les apprenants les habiletés/contenus du programme de Terminale D selon les niveaux taxonomiques suivants : la connaissance, la compréhension, l'application et le traitement de situation.

II. STRUCTURE DE L'EPREUVE

L'épreuve comporte six (6) exercices et évalue les trois (3) compétences de la classe de Terminale D.

EXERCICE 1 : Test objectif (niveaux de taxonomie 1 ou 2).
EXERCICE 2 : Test objectif (niveaux de taxonomie 1, 2 ou 3).
EXERCICE 3 : Exercice de renforcement en test subjectif
EXERCICE 4 : Exercice d'approfondissement en test subjectif.
EXERCICE 5 : Exercice d'approfondissement en test subjectif.
EXERCICE 6 : Situation complexe.

Commentaires

- Un exercice de renforcement porte sur plusieurs habiletés d'une même leçon.
- Un exercice d'approfondissement porte sur plusieurs habiletés de plusieurs leçons.
- Les exercices de renforcement et d'approfondissement ne doivent pas être contextualisés.
- Un exercice peut porter sur plusieurs compétences.
- Les exercices 3, 4, 5 et 6 couvriront les trois (3) compétences au programme.
- Les tests objectifs porteront sur des leçons qui n'auront pas été prises en compte par les exercices 3, 4, 5 et 6.

III. DUREE DE L'EPREUVE ET COEFFICIENT

L'épreuve de Mathématiques au Baccalauréat, série D, est conçue pour être traitée en quatre (04) heures par le candidat. Son coefficient est 4.
Un professeur qui enseigne la classe de Terminale D devrait réussir une rédaction du type élève en au plus deux heures (2h).

IV. PROPOSITION D'ATTRIBUTION DE POINTS

<table>
<tr><td>Exercice 1 (test objectif)</td><td rowspan="2">04 pts</td></tr>
<tr><td>Exercice 2 (test objectif)</td></tr>
<tr><td>Exercice 3 (renforcement)</td><td rowspan="3">11 pts</td></tr>
<tr><td>Exercice 4 (approfondissement)</td></tr>
<tr><td>Exercice 5 (approfondissement)</td></tr>
<tr><td>Exercice 6 (situation complexe)</td><td>05 pts</td></tr>
</table>

Exemple d'épreuve de
Mathématiques – Série D

Durée : 4 heures
Coefficient : 4

Cette épreuve comporte trois (3) pages numérotées 1 sur 3 ; 2 sur 3 et 3 sur 3
Chaque candidat recevra une (1) feuille de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique non graphique est autorisé.

Exercice 1 (2 points)

Écris le numéro de chaque affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	La fonction $x \longmapsto 2 + \cos^5 x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto -5\sin x \cos^4 x$.
2	Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle K, (C) sa représentation graphique dans un repère orthogonal (O, I, J), a et b deux éléments de K (a<b). L'aire (en unités d'aire) de la partie du plan limitée par (C), (OI) est les droites d'équations x=a et x=b est : $\int_b^a f(t)dt$.
3	Si f est une bijection dérivable et strictement monotone sur un intervalle I , telle que : $\forall x \in$ I et f' (x) ≠ 0 , alors sa bijection réciproque f^{-1} a pour dérivée : $\forall x \in f(I)$, $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{f'(f^{-1}(x))}$
4	On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double de caractères X et Y, le nombre réel r défini par : $r = \frac{cov(X;Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$

Exercice 2 (2 points)

Pour chacune des affirmations ci-dessous, quatre réponses sont données dont une seule est juste. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Affirmations	Réponses	
1.	*F* et *g* sont deux fonctions, *u, v* et l sont soit des nombres réels, soit $-\infty$, soit $+\infty$. Si $\lim_{x \to u} f(x) = v$ et $\lim_{x \to v} g(x) = l$, alors	A	$\lim_{x \to v} (f \circ g)(x) = -\infty$;
		B	$\lim_{x \to u} (g \circ f)(x) = l$;
		C	$\lim_{x \to v} (f \circ g)(x) = l$;
		D	$\lim_{x \to u} (g \circ f)(x) = v$.
2.	Les solutions de l'équation différentielle y' + 2y = 0 sont les fonctions :	A	$X \longmapsto k + e^{-2x}$ $(k \in \mathbb{R})$
		B	$X \longmapsto ke^{2x}$ $(k \in \mathbb{R})$
		C	$X \longmapsto ke^{-2x}$ $(k \in \mathbb{R})$
		D	$X \longmapsto xe^{-2k}$ $(k \in \mathbb{R})$
3.	Si (U_n) est une suite géométrique de raison k (k≠1), alors la somme des termes consécutifs $(U_0, U_1, ….. U_{n-1}, U_n$ est égale à	A	$U_0 + \frac{1-k^n}{1-k}$
		B	$U_0 \times \frac{1-k^n}{1-k}$
		C	$U_0 \times \frac{1-k^{n-1}}{1-k}$
		D	$U_0 \times \frac{1-k^{n+1}}{1-k}$
4.	Si pour tout nombre réel *x* non nul, $3 - \frac{1}{x} < f(x) < \frac{1}{x} + 3$, alors la limite de *f* en $+\infty$ est égale à :	A	0
		B	$-\infty$
		C	3;
		D	$+\infty$.

Exercice 3 (4 points)

Un agent de l'agriculture vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35% des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25% de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3.
Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des cacaoyers et des caféiers.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80% de cacaoyers, alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

1. L'agent de l'agriculture choisit un arbre dans son stock.
On considère les événements suivants :

- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 » ;
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2» ;
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 » ;
- C : « l'arbre choisi est un cacaoyer» ;
- F : « l'arbre choisi est un caféier ».

a) Construis un arbre pondéré traduisant la situation.
b) Calcule la probabilité pour que l'arbre choisi soit un cacaoyer acheté chez l'horticulteur H_3.
c) Justifie que la probabilité de l'événement C est égale à 0,525.
d) l'arbre choisi est un cacaoyer. Détermine la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 (*on arrondira le résultat à l'ordre 3*).

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de l'agent de l'agriculture. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de cacaoyers de l'échantillon choisi.
a) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.
b) Calcule la probabilité pour que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 cacaoyers
(*On arrondira le résultat à l'ordre 3*).

Exercice 4 (3 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), on désigne par K, A et B les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 telles que $z_1 = 2$, $z_2 = 4 + 2i$ et $z_3 = 2 + 4i$.
L'unité graphique est 2 cm.

1.a) Place les points K, A et B dans le plan.
b) Détermine la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

2. On note S la similitude directe de centre K qui transforme A en B.
a) Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 + i)z - 2i$.
b) Détermine les affixes respectives des points I' et J', images respectives des points I et J
c) Place I' et J'.

3. Détermine le rapport et une mesure de l'angle orienté de la similitude directe S.

4. Soit (C) le cercle de centre $\Omega(1\,;\,1)$ et de rayon 2.
a) Trace (C).
b) Détermine le centre et le rayon de (C'), image de (C) par S.
c) Construire (C').

5.a) Détermine puis construis l'image par S de la droite (IJ).
b) On désigne par E le point d'intersection de (C) et de la droite (IJ) d'abscisse négative. Place E.
c) Soit E' l'image de E par S. Justifie la position du point E' puis place E'.

Exercice 5 (4 points)

Soit la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}^*$ Par : $f(x) = 2x - \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm.

1. Démontre que f est une fonction impaire, puis interprète graphiquement ce résultat.

2. a) Détermine la limite de f à droite en 0, puis interprète graphiquement le résultat.
   b) Détermine la limite de f en + ∞.

3. a) Démontre que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = 2x - 1 - \dfrac{2}{e^x-1}$.
   b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote à la courbe (C_f) en + ∞.
   c) Etudie la position relative de (C_f) et (D) sur]0 ; +∞[.

4.a) Démontre que : $\forall x \in$] 0 ; +∞[, $f'(x) = 2 + \dfrac{2e^x}{(e^x-1)^2}$.
   b) Étudie le sens de variation de f sur]0 ; + ∞[.
   c) Dresse le tableau de variation de f sur]0 ; +∞[.

5. Construis la courbe (C_f) sur $\mathbb{R}^*$ et ses asymptotes.

Exercice 6 (5 points)

Une usine fabrique et commercialise des sachets de poudre de cacao. Sa capacité journalière de production est comprise entre 1 000 et 3 000 sachets. On suppose que toute la production est commercialisée. Une étude a révélé que le bénéfice journalier, exprimé en millions de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de x milliers de sachets est modélisé sur l'intervalle
[1 ; 3] par la fonction B définie par : $\mathrm{B}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2 + 2\ln x$.
Le Directeur de l'usine veut accroître le bénéfice de l'entreprise. N'ayant pas de personnel qualifié, il te demande le nombre de sachets à produire en un jour, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal.
Détermine le nombre de sachets de poudre de cacao à produire pour obtenir un bénéfice maximal.

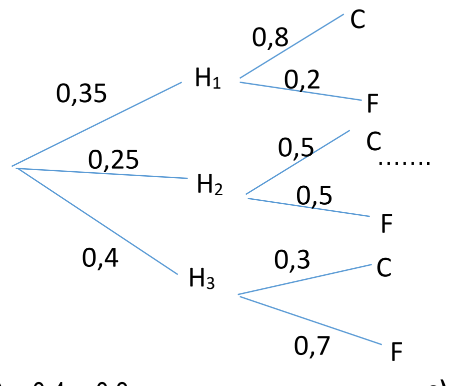
CORRIGE

EXERCICE 1 (2 points)
1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Faux, 4. Vrai

EXERCICE 2 (2 points)
1. B ; 2.C ; 3. D ; 4. C

EXERCICE 3 (4 points)

1. a)



b) P(C∩ H_3) = 0,4 × 0,3
P(C∩ H) = 0,12

c) P(C) = P (C∩ H_1) + P (C∩ H_2) + P (C∩ H_3)
P(C) = 0,35 × 0,8 + 0,25 × 0,5 + 0,4 × 0,3
P(C) = 0,525

d) $P_C(H_1) = \frac{P(C \cap H_1)}{P(C)}$

$P_C(H_1) = 0{,}533$

2.a) Justification correcte de X suit une loi binomiale

Les paramètres sont : $n = 10$ et $p = 0{,}525$

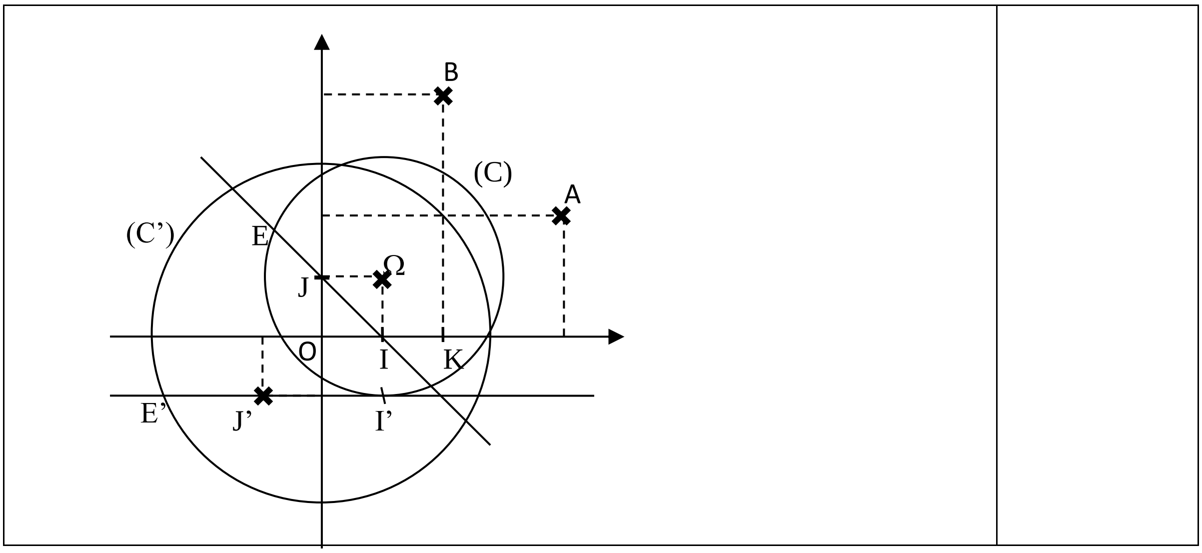
b) $P(X = 5) = C_{10}^{5} \times p^5 \times (1- p)^5$

$P(X = 5) = C_{10}^{5} \times (0{,}525)^5 \times (0{,}475)^5$

$P(X = 5) = 0{,}243$

EXERCICE 4 (3 points)

1.a) Plaçons les points K, A et B.



1.
b) Déterminons la forme algébrique du nombre complexe $\frac{Z_3-Z_1}{Z_2-Z_1}$.

On a :

$\frac{Z_3-Z_1}{Z_2-Z_1} = \frac{2+4i-2}{4+2i-2}$

$= \frac{4i}{2+2i}$

$= \frac{4i(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}$

$= 1+i.$

La forme algébrique du nombre complexe $\frac{Z_3-Z_1}{Z_2-Z_1}$ est $1+i$.

2. a) Démontrons que l'écriture complexe de S est : z'= (1+i)z -2i.

L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

On a : $\begin{cases} S(K) = K \\ S(A) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = az_1 + b \\ z_3 = az_2 + b \end{cases}$

En faisant la différence membre à membre des deux équations précédentes, on a :

$A = \frac{Z_3-Z_1}{Z_2-Z_1}$

$= 1 + i$ d'après la question précédente.

$B = 2 - 2(1+i)$

$= -2i.$

Donc, l'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z - 2i$.

b) Déterminons les affixes des points I' et J'.

On a :

$Z_{I'} = (1 + i)\times 1 - 2i.$

$= 1 - i.$

$Z_{J'} = (1 + i)i - 2i.$

$= -1 - i.$

3. Déterminons le rapport et une mesure de l'angle orienté de S.

- Le rapport de S est $|a|$ et $|a| = \sqrt{2}$
- Désignons par θ une mesure de l'angle orienté de S.

On a :

$\text{Cos}\theta = \frac{\text{Re}(a)}{|a|}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$ Et

$\text{Sin}\theta = \frac{\text{Im}(a)}{|a|}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

Par suite, une mesure de l'angle orienté de S est $\frac{\pi}{4}$.

4.a) Traçons (C). Voir question 1.*a*).

b) Déterminons le centre et le rayon de (C').

(C') a pour centre Ω', image de Ω par S et pour rayon $2|a|$.

On a :

$Z_{\Omega'} = (1 + i)(1+i) - 2i$

$= 0$

$2|a| = 2\sqrt{2}$

(C') est donc le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.

5.a) Déterminons et construisons l'image de la droite (IJ) par S.

L'image de la droite (IJ) par S est la droite (I'J').

Pour la construction, voir question 1-*a*).

b) Plaçons E. Voir question 1-*a*).

c) Justifions la position de E' puis plaçons E'.

- Justifions la position de E'. $E \in [IJ] \cap (C)$, donc : $E' \in [I'J'] \cap (C')$.
- Plaçons E'. Voir question 1-a).

EXERCICE 5 (4 points)

1. D_f Est symétrique par rapport à 0 ………………………. ………

Justification correcte de $f(-x) = -f(x)$ ……………………….

<u>Interprétation graphique</u>

Le point O est centre de symétrie de la courbe (C_f) ……………

2.a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe (C_f).

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3.a) Justification correcte de $f(x) = 2x - 1 - \frac{2}{e^x - 1}$

b) Démonstration correcte de (D_1) est une asymptote à(C_f) en $+\infty$

c) Signe correcte de $f(x) - (2x - 1)$ ……………………………

La courbe (C_f) est au-dessous de la droite (D_1) sur $]0; +\infty[$ …..

4.a) Justification correcte de $f'(x) = 2 + \frac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$

b) Justification correcte de : $\forall\, x \in\ ]0; +\infty[\ f'(x) > 0$ …………..

f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ …………………………

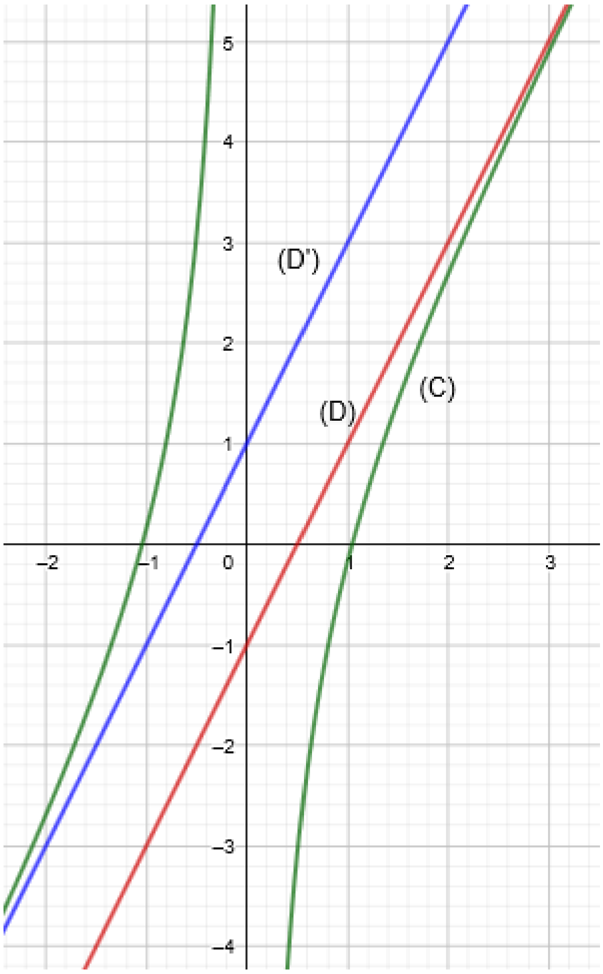
c)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$-\infty \nearrow +\infty$

5. *Voir feuille annexe*

Asymptotes………………………………………………………

Courbe (C_f) ……………………………………………………



EXERCICE 6 (5 points)

<table>
<tr><td>1.</td><td>X le nombre de sachets et B(x) le bénéfice. Le nombre recherché est l'abscisse du point où B atteint son maximum sur l'intervalle [1 ; 3].
<u>Calculons la dérivée de B</u>
$B'(x) = -x + 1 + \frac{2}{x} = \frac{-x^2 + x + 2}{x}$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td><u>Déterminons le signe de $B'(x)$Sur [1 ; 3]</u>
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>$B'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>3.</td><td><u>Dressons le tableau de variation de $B(x)$ Sur [1 ; 3]</u>
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>$B'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td></td></tr>
<tr><td>$B(x)$</td><td>$\frac{5}{2}$</td><td>↗</td><td>2+2ln2</td><td>↘</td><td>$\frac{1}{2}$+2ln3</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>4.</td><td><u>Exploitation du tableau de variation de la fonction B</u>

B atteint son maximum au point d'abscisse 2.
Le nombre de sachets de poudre de cacao à produire pour atteindre un bénéfice maximal est 2 000.</td></tr>
</table>

Grille de correction de l'exercice 6

Critères	Indicateurs	Barème de notation
CM1 : **Pertinence** Identification du modèle correspondant au problème posé (Interprétation correcte de la situation complexe, pertinence des choix opérés sur les données de la situation)	- Pour résoudre le problème, je vais rechercher le maximum de la fonction s'il existe - Présence de calcul de la dérivée d'une fonction ; - Présence de recherche du signe de la dérivée ; - Présence d'un tableau de variation.	**0,75 point** 0,25 point pour un élément donné ; 0,5 pour 2 éléments donnés et 0,75 point pour 3 éléments donnés)
CM2 : **Utilisation correcte des outils mathématiques en situation** (Concerne les étapes de la démarche) - Choix des outils appropriés - Application correcte des propriétés, règles et définitions	- Calcul de la dérivée - Détermination du signe de la dérivée - Détermination du maximum - Exactitude des formules - Justesse de l'argumentation (détermination du nombre de sachets)	**2,5 point :** 1 indic sur 5 $\rightarrow$ 1 pt 2 indic sur 5 $\rightarrow$ 1,5 pt 3 indic sur 5 $\rightarrow$ 2,5 pt
CM3 : **Cohérence de la réponse** – Cohérence entre les étapes de la démarche – Cohérence dans la démonstration	- Le résultat produit est conforme au résultat attendu - Le résultat produit est en adéquation avec la démarche - La qualité des enchainements de la démarche	**1,25 point :** 1 indic sur 3 $\rightarrow$ 0,75 pt 2 indic sur 3 $\rightarrow$ 1,25 pt
CP : **Critère de perfectionnement**	- Concision - Originalité - Bonne présentation	**0,5 point :** 1 indic sur 3 $\rightarrow$ 0,25 pt 2 indic sur 3 $\rightarrow$ 0,5 pt

Information sur la copie de l'élève

Pour la correction d'une situation complexe au cours d'une évaluation chiffrée, l'enseignant devra faire apparaître sur la copie de chaque apprenant le détail des notes par critère.

Par exemple

Critère	Total de points	Sur
CM1	0,5	**0,75**
CM2	1	**2,5**
CM3	0.75	**1,25**
CP	0,25	**0,5**
Total	2,5	**5**